Quelques conseils
— Bien travailler la correction du devoir!!!
— N'hésitez pas à vérifier avec la calculatrice vos résultats : soyez malins pour répondre entre autre à un QCM ou faire une conjecture.
— Faites un dessin pour vous aider!!!
— Faites vous des fiches de rappel!!!

exercice n° 1 : (6 points)

1. Conjectures graphiques
   (a) Voir cours
   (b) La suite (u_n) semble être décroissante et convergente de limite 1.
2. Démonstration des conjectures précédentes.
   (a) On calcule $f'(x) = 2x - 2$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Comme f est une fonction affine avec $m > 0$, on en déduit le signe de $f'(x)$ ainsi que le sens de variation de f :

x	1		2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	2

   f est donc croissante sur $[\,1\ ,\ 2\,]$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a $1 \leq u_n \leq 2$.
   Identification de la propriété $P(n)$: $1 \leq u_n \leq 2$.

   Initialisation : $P(0)$ vraie? $1 \leq u_0 \leq 2$?

   D'après l'énoncé, $u_0 = \dfrac{3}{2}$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$ donc $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n fixé : **HR** $\boxed{1 \leq u_n \leq 2}$.

   Montrons que $P(n+1)$ est vraie : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$?
   HR $1 \leq u_n \leq 2$.
   On remarque que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 - 2x + 2$. f est strictement croissante sur l'intervalle $[1\ ,\ 2]$.
   Donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$, or $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. L'hérédité est établie puisque P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 0$, $1 \leq u_n \leq 2$.

   (c) Sens de variation de la suite (u_n) :
   Méthode 1 : par récurrence
   Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $u_n \geq u_{n+1}$.
   A faire!!! : on utilise le fait que f est croissante sur $[1\ ,\ 2]$ pour justifier l'hérédité
   Méthode 2 : Signe de $u_{n+1} - u_n$

   $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$.

On pose $g(x) = x^2 - 3x + 2$.
Montrer que $g(x) \leq 0$ sur $[1\ ,\ 2]$ (A faire calculer Δ puis tableau de signe de $g(x)$).
Or on sait d'après 2)b), $1 \leq u_n \leq 2$ donc $g(u_n) \leq 0$ soit $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite u est décroissante.

(d) Comme la suite est minorée par 1 et décroissante, alors elle converge vers une limite l.
De plus, $1 \leq u_n \leq u_0$ soit $1 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}$ donc nécessairement $\boxed{1 \leq l \leq \dfrac{3}{2}}$
Celle limite l vérifie aussi $\boxed{l = f(l)}$:
$l^2 - 2l + 2 = l \Leftrightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \Leftrightarrow l = 1 \qquad l = 2$ (calcul de Δ)
donc $\boxed{l = 1}$

exercice n° 2 : (5 points)

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 + 5x^2 - x + 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3(-2 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}) = +\infty$ par produit de limites.

2) On reconnait la limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+4}{x^2+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x(1 + \frac{2}{x})}{x^2(1 + \frac{5}{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{5}{x}} = 0 \text{ par produit de limite}$$

$\lim\limits_{X \to 0} \cos(X) = \cos(0) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(\dfrac{2x+4}{x^2+5}) = 1}$.
La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

3) $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 6 = -4$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} 2 - x = 0^-$ car :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2 - x$	$+$	0	$-$

Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-6}{2-x} = +\infty}$.
La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

exercice n° 3 : (Tangentes et dérivation 3 points)

La courbe représentant f a t-elle des tangentes parallèles à la droite (D) d'équation $y = -x + 1$?
Deux droites (non verticales) sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur donc :

BUT : Résoudre $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = -1$ A faire!!!

Solutions : $\boxed{x = 0}$ **ou** $\boxed{x = 2}$
En déduire les ordonnées des points en calculant $f(x)$.

exercice n° 4 : (ROC 4 points)

1. **Voir cours**
2. Soit $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant -2\sin(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow x^3-2 \leqslant x^3-2\sin(x) \leqslant x^3+2$.

   Or $x^2+1>0$ donc $\dfrac{x^3-2}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x^3-2\sin(x)}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x^3+2}{x^2+1}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{1-\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = +\infty$

   Donc d'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2\sin(x)}{x^2+1} = +\infty}$

exercice n° 5 : (Prise d'initiative /2 points)

1. En traçant le graphique, on conjecture que la longueur AM est minimale pour $x \in [0\ ;\ 1]$, en faites pour $x = \dfrac{1}{2}$.
2. Dans un repère orthonormé, A$(1\,;\,0)$, $M(x\ ;\ \sqrt{x})$.
   A$M = \sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2-2x+1+x} = \boxed{\sqrt{x^2-x+1}}$.
3. On note g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2-x+1}$. g est la fonction correspondant à la longueur AM.
   (a) $g = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2-x+1$ d'où $g' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $g'(x) = \boxed{\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}}$.

   Il est clair que $g'(x)$ est du signe de $2x-1$, donc positif pour $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ et négatif pour $x \in \left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

   (b) Le tableau de variation de g est donc : .....

   (c) La distance est minimale pour $\boxed{x = \dfrac{1}{2}}$ et vaut $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Les points à revoir ! ! !

1. Revoir absolument l'utilisation de la croissance de f pour démontrer l'hérédité.
2. Une suite décroissante et minorée par M converge vers un réel L avec $M \leqslant L$.
3. Pour trouver L, pensez à résoudre $f(x) = x$ (lien avec le graphique où les points M_n se rapprochent du point d'intersection de C_f avec $d : y = x$.
4. Pour trouver la limite de $f(x)$ en une valeur interdite : faire le signe du dénominateur et appliquer les règles de calcul sur les limites.
5. Revoir que le coefficient directeur d'une tangente est égale à $f'(a)$.